No. Date 18/3/2016

Μαθημα 8º

Αναλυτικη Γεωμετρια

Μεικτο Γινομενο Διανυσματων

Εστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ (π.χ $\in \mathbb{R}^3$)

Συμβ: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{\gamma})$

! $\vec{a} \cdot \vec{b}$ αριθμος
↳ Εσωτερικο γινομενο

! διανυσμα x διανυσμα = αριθμος

Παρατηρηση

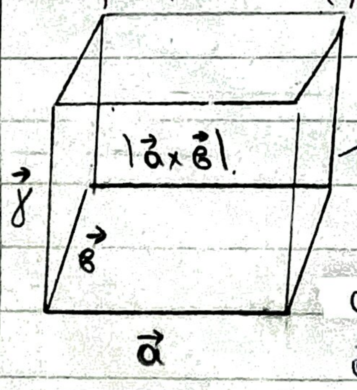
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = 0$ αν $\vec{a}, \vec{b}$ ή $\vec{\gamma} = 0$ ή αν $\vec{a}, \vec{b}$ συγγραμικά ($\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$)
$\vec{a}, \vec{\gamma}$ — " —
$\vec{b}, \vec{\gamma}$ — " —

! Αν εχω
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\Rightarrow \underset{\text{νεο διανυσμα}}{\vec{a} \times \vec{b}} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (\underbrace{a_2 b_3 - a_3 b_2}_{e_1} \ldots$$

(*) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\gamma} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{\gamma}| \cdot \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{\gamma})$

Γεωμετρικη Ερμηνεια



$V = $ Εμ. βασης x υψος ($\text{πρ}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{\gamma}$)

$υ = \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{\gamma}) \cdot |\vec{\gamma}|$

Το μεικτο γινομενο διανυσματων σημαινει ογκος του παραλληλεπιπεδου με συντεταγμενες $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$

Ο ογκος και το εμβαδο (>0 παντα)

$$V = |(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right|$$

(*) $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ συνεπιπεδα $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$

δηλ. $(\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0$

Διοεξωτερικο Γινομενο Διανυσματων

Προταση

Ισχυουν οι ταυτοτητες → Διανυσμα

(1) $\vec{a} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\beta} - (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

(2) $(\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{a} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{a}$

(3) Ταυτοτητα Jacobi

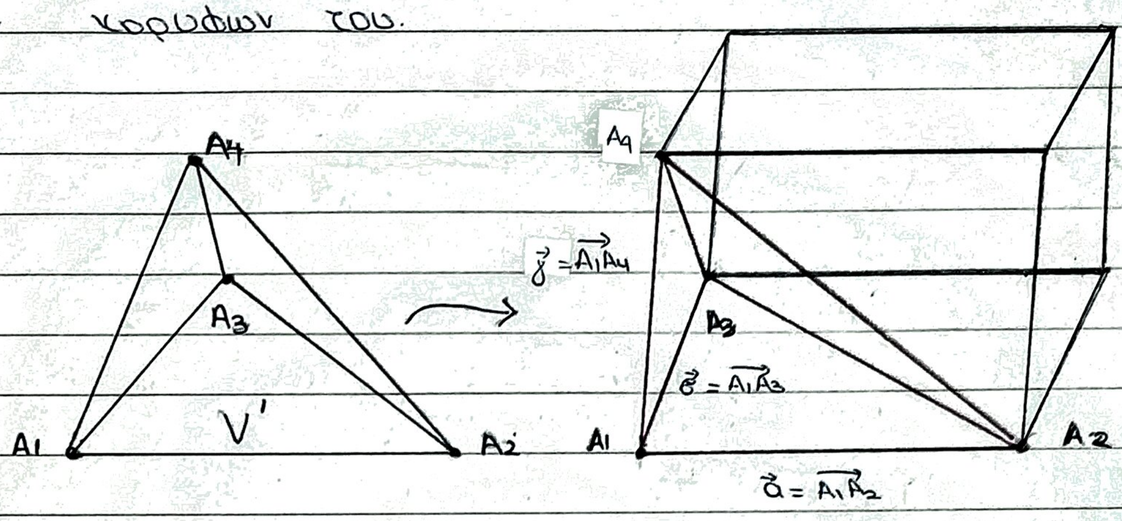
$$\underbrace{\vec{a} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})} + \underbrace{\vec{\beta} \times (\vec{\gamma} \times \vec{a})} + \underbrace{\vec{\gamma} \times (\vec{a} \times \vec{\beta})} = \vec{0}$$

Αποδειξη

$$\left[\cancel{(\vec{a} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\beta}} - \cancel{(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}}\right] + \left[\cancel{(\vec{\beta} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\gamma}} - \cancel{(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{a}}\right] + \left[\cancel{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{a}} - \cancel{(\vec{\gamma} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\beta}}\right] = \vec{0}$$

Εφαρμογή 1:

Υπολογισμός όγκου τετραέδρου συναρτήσει των συντεταγμένων των κορυφών του.



$A_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $\quad \overrightarrow{A_1A_2} = (\overset{a_1}{x_2 - x_1}, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$A_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\quad \overrightarrow{A_1A_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

$A_3 = (x_3, y_3, z_3)$ $\quad \overrightarrow{A_1A_4} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$

$A_4 = (x_4, y_4, z_4)$

$$|V| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right| \Rightarrow \frac{1}{6} \left| \overset{\det}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}} \right| = V'$$

γιατί $\quad V' = \frac{1}{6} V$

(*) Τα A_1, A_2, A_3, A_4 ομοεπίπεδα $\Leftrightarrow \det = 0$

Σχόλιο: Η προσεταιριστική ιδιότητα στο διεξωτερικό γινόμενο <u>ΔΕΝ</u> ισχύει!

No. Date

ΑΣΚΗΣΗ 1

Εστω $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Νδο τα $(\vec{a}+\vec{b})$, $(\vec{a}-\vec{b})$ καθετα $\iff |\vec{a}| = |\vec{b}|$

ΛΥΣΗ

Τα $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ καθετα $\iff \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle = 0$ ή $\underbrace{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0}_{\text{αλλος συμβολισμος}}$ } Ειναι αριθμος γιατι εχω εσωτ. γινομενο

$\iff \langle \vec{a}, \vec{a}-\vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle = 0 \iff$

$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0 \xLeftrightarrow{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}$

$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0 \xLeftrightarrow[\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2]{} |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \iff$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 \xLeftrightarrow[\text{θετικα}]{\text{όλο}} |\vec{a}| = |\vec{b}|$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Νδο $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{\gamma} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{\gamma}) \iff \underbrace{(\vec{a} \times \vec{\gamma})}_{\text{διανυσμα}} \times \vec{b} = \vec{0}$

ΛΥΣΗ

Εστω $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{\gamma} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{\gamma}) \iff$

1ος τροπος αλγεβρικα

$\cancel{(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{b}} - (\vec{b}\cdot\vec{\gamma})\vec{a} = \cancel{(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{b}} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{\gamma} \iff (\vec{b}\cdot\vec{\gamma})\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{\gamma}$

$\Rightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{\gamma} - (\vec{b}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{a} = 0 \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{\gamma}) \times \vec{b} = \vec{0}$

$\boxed{\begin{array}{l} \star\ (a\cdot b)\cdot \gamma \neq a\,(b\gamma) \text{ Δεν ισχυει η} \\ \text{προσεταιριστικη στο εσωτερικο γινομενο} \end{array}}$

2ος τροπος γεωμετρικα

Τα $\vec{a}, \vec{\gamma}$ γραμ. εξαρτημενα τοτε το μεικτο γινομενο τους ειναι μηδεν $\left\{ \text{δηλ. } \begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{\gamma} \\ \vec{\gamma} \times \vec{a} \end{array} = \vec{0} \right\} \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{\gamma}) \times \vec{b} = \vec{0}$

Το μεικτο γινομενο δυο μη μηδενικων διανυσματων μπορει να ειναι 0

No. Date

Έστω $(\vec{a}\times\vec{\gamma})\times\vec{\beta}=\vec{0} \Leftrightarrow (\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma}-(\vec{\gamma}\vec{\beta})\vec{a}=\vec{0}$

$\Rightarrow (\vec{a}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}-(\vec{\gamma}\vec{\beta})\vec{a}+\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}-(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{\beta}}_{\vec{0}}=\vec{0} \Rightarrow$

$[(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}-(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}]+[-(\vec{\gamma}\vec{\beta})\cdot\vec{a}+(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{\beta}]=\vec{0} \Rightarrow$

$(\vec{a}\times\vec{\beta})\times\vec{\gamma}-\vec{a}\times(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})=\vec{0}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ γνωστά διανύσματα. Να βρεθεί το $\vec{x}$ αν το $\vec{a}=\vec{\beta}+(\vec{\gamma}\times\vec{x})$ και αν $\vec{\gamma}\times\vec{a}=\vec{0}$ και το $\vec{\gamma}\cdot\vec{x}=0$ $\vec{\gamma}\neq\vec{0}$

Διαφορετική διατύπωση
Αν τα $\vec{\gamma},\vec{x}$ κάθετα και ..
ή τα $\vec{a},\vec{\gamma}$ γραμ. εξαρτ. (τα $\vec{a}\parallel\vec{\gamma}$)

$(+)\ \vec{a}\times\vec{\gamma}\neq\vec{\gamma}\times\vec{a}$

Λύση

Προσπαθούμε στην εξίσωση $\vec{a}=\vec{\beta}+(\vec{\gamma}\times\vec{x})$ να απομονώσουμε τον άγνωστο $\vec{x}$

Πώς το κάνω; Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της (διανυσμ. εξίσωσης) με (γνωστά) διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$

Πολ/ζω εξωτερικά με $\vec{\gamma}$ (δεξιά)

$\vec{a}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}\times\vec{x} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{\gamma}=(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\times\vec{x})\times\vec{\gamma} \Rightarrow$

$\vec{a}\times\vec{\gamma}=\vec{\beta}\times\vec{\gamma}+(\vec{\gamma}\times\vec{x})\times\vec{\gamma} \Rightarrow$

$\cancel{\vec{a}\times\vec{\gamma}}^{0}=\vec{\beta}\times\vec{\gamma}+(\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma})\vec{x}-\cancel{(\vec{x}\cdot\vec{\gamma})}^{0}\cdot\vec{\gamma}$

$\vec{\gamma},\vec{x}$ κάθετα

$-\vec{\beta}\times\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\times\vec{\beta}$

Άρα $\vec{\gamma}\times\vec{\beta}=|\vec{\gamma}|^2\cdot\vec{x}$

- αν $\vec{\gamma}\neq\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\dfrac{\vec{\gamma}\times\vec{\beta}}{|\vec{\gamma}|^2}$

- αν $\vec{\gamma}=\vec{0}$ άτοπο από υπόθεση

No. Date

(*) Δυο διανυσματα παραλληλα $\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

Ασκηση 4

Εστω $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{\gamma}=(3,0,3)$

Αν $\vec{x}\perp\vec{\gamma}$ να βρεθει το $\vec{x}$, $\vec{a}=\vec{b}+\vec{\gamma}\times\vec{x}$

Λυση

Παρατηρουμε οτι $\vec{\gamma}=3\vec{a}$ ($\vec{a},\vec{\gamma}$ γραμ. εξαρτ. $\Rightarrow \vec{\gamma}\times\vec{a}=\vec{0}$)

Ειδαμε οτι $\vec{x}=\dfrac{\vec{\gamma}\times\vec{b}}{|\vec{\gamma}|^2}$ (*)

Αρα $\vec{\gamma}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}e_1-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}e_2+$

$+\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}e_3=-3(1,0,0)-3(0,1,0)+3(0,0,1)=(-3,-3,3)$

και $|\vec{\gamma}|=\left(\sqrt{3^2+0^2+3^2}\right)^2=18$

Αρα $\vec{x}\overset{(*)}{=}\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$

Ασκηση 5

Αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ γνωστα διανυσματα να λυθει ως προς $\vec{x}$:

$\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} - \vec{x}$ (2)

ΛΥΣΗ

Πολ/ζω εσωτερικα με $\vec{a}$ (απο δεξια) αρα θα παρω

$(\vec{x} \times \vec{a}) \cdot \vec{a} = (\vec{b} - \vec{x}) \cdot \vec{a}$

- αν $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{b}$

Οποτε μπορω να πω εστω $\vec{a} \neq \vec{0}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Γεωμετρικά}\\ \vec{x} \times \vec{a} \perp \vec{a} \Rightarrow \\ (\vec{x} \times \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0\end{array}}$$

Αλγεβρικά

$$\vec{x} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Αρα $(\vec{b} - \vec{x}) \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{x} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow$

$\vec{x} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (1) δεν μπορω να κανω κατι αλλο οποτε την κρατάω και ξανα πάω στην αρχική να βγάλω άλλη μια σχέση

Πολ/ζω εξωτερικα με $\vec{a}$ (απο δεξια) αρα εχω

$(\vec{x} \times \vec{a}) \times \vec{a} = (\vec{b} - \vec{x}) \times \vec{a} \Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{x} = \vec{b} \times \vec{a} - \vec{x} \times \vec{a}$

$\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longrightarrow}} (\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} - |\vec{a}|^2 \cdot \vec{x} = \vec{b} \times \vec{a} - (\vec{b} - \vec{x}) \Rightarrow$

$\vec{x} + |\vec{a}|^2 \cdot \vec{x} = (\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} + \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} \Rightarrow$

$(1 + |\vec{a}|^2) \cdot \vec{x} = (\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow$

$$\vec{x} = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} + \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b})}{1 + |\vec{a}|^2}$$

{ Μπορω να διαιρεσω με το $1 + |\vec{a}|^2$ γιατι ειναι αριθμος }

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b}=1+(-1)+(-1)=-1\\ \vec{b}\cdot\vec{b}=3\end{array}\right\}$$

Date

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δινονται τα διανυσματα $\vec{a}=(1,1,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,1)$

Να υπολογιστει η παρασταση $\left(\left(\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}}\right)\times\vec{b}\right)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=A$

ΛΥΣΗ

$$A=\left[\left(\overset{-1}{(\vec{a}\cdot\vec{b})}\cdot\vec{b}-\overset{3}{(\vec{b}\cdot\vec{b})}\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b}\right]\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=$$

$$=\left[(-\vec{b}-3\vec{a})\times\vec{b}\right]\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=$$

→ Μεικτο Διανυσμα

που σημαινει $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{\gamma})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\gamma}$

$$=(-\vec{b}-3\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{a}\times\vec{b})=(-\vec{b}-3\vec{a})\cdot\left(-(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}\right)=$$

↓

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$$=\underbrace{(-\vec{b}-3\vec{a})}_{\vec{\gamma}}\cdot\left[\underbrace{-(-\vec{b}-3\vec{a})}_{(-\vec{\gamma})}\right]=-|\vec{b}-3\vec{a}|^2$$

$$=-\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}=-|\vec{\gamma}|^2$$

$$-\vec{b}-3\vec{a}=-(1,-1,1)-3(1,1,-1)=(-4,-2,2)$$

Συνεπως $-|\vec{b}-3\vec{a}|^2=-\left[(-4)^2+(-2)^2+2^2\right]=-24$

Αλλος τροπος

$$A=\left(\left(\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}}_{\alpha}\right)\times\underbrace{\vec{b}}_{\beta}\right)\cdot\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\gamma}$$

$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\gamma$ η $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\gamma$

δηλ $A=((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b})\cdot\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{b})=$

$=((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b})\cdot(-(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b})=-|(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}|^2$ = οπως πριν